ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 622.276.031:532.5

Обобщенные уравнения притока к скважине на установившемся режиме

А.В. Насыбуллин
Альметьевский государственный технологический университет «Высшая школа нефти», Альметьевск, Российская Федерация

В статье представлен вывод обобщенных формул дебита вертикальной скважины при радиальном установившемся притоке жидкости для случаев отклонения от закона Дарси. Приведены графики зависимости дебита от градиента давления и определено время прорыва воды при непоршневом вытеснении нефти водой для различных законов фильтрации.

Ключевые слова: подземная гидромеханика, уравнение притока, закон Дарси, радиальный приток, установившийся приток, формула Дюпюи, формула Мирзаджанзаде, формула Форхгеймера, непоршневое вытеснение, относительные фазовые проницаемости, теория Бакли-Леверетта.

Для цитирования: Насыбуллин А.В. (2026). Обобщенные уравнения притока к скважине на установившемся режиме. Трудноизвлекаемые запасы, 1(3), с. 6-11.

Generalized equations of inflow to the well at steady state

A.V. Nasybullin
Almetyevsk State Technological University «Petroleum higher school», Almetyevsk, Russian Federation

The article presents the derivation of generalized formulas for the flow rate of a vertical well with a radial steady-state inflow of liquid for cases of deviation from Darcy's law. Graphs of the flow rate dependence on the pressure gradient are presented and the time of water breakthrough during non-piston displacement of oil by water for various filtration laws is determined.

Keywords: reservoir engineering, inflow equation, Darcy's law, radial inflow, steady-state inflow, Dupuis formula, Mirzajanzadeh formula, Forchheimer formula, non-piston displacement, relative phase permeability, Buckley-Leverett theory.

Recommended citation: Nasybullin A.V (2026). Generalized equations of inflow to the well at steady state. Hard-to-recover reserves, 1(3), pp. 6-11.

Введение

Будем рассматривать одномерное радиальное течение жидкости в пористой среде (нефтяном пласте) к вертикальной скважине на установившемся режиме. Как правило, такое течение описывается законом Дарси, а уравнение притока на установившемся режиме описывается его следствием – формулой Дюпюи (Щелкачев, Лапук, 1949; Маскет, 1949; Чарный, 1963; Полубарина-Кочина, 1969; Баренблатт и др., 1984; Ентов, Зазовский, 1989).

Хорошо известно, что закон Дарси имеет пределы применимости, связанные как с проявлением инерционных сил при высоких скоростях фильтрации (верхний предел), так и с проявлением неньютоновских свойств жидкости при течении через пористую среду при низких скоростях фильтрации (нижний предел). Для первого случая применяется уравнение Ф. Форхгеймера Forchheimer, 1901), для второго – уравнение А.Х. Мирзаджанзаде (Мирзаджанзаде и др., 1992; Мирзаджанзаде и др., 1992; Желтов, 1998). Уравнение Ф. Форхгеймера применяется в околоскважинных зонах, имеющих высокие скорости фильтрации и в трещиноватых, и в карстовых породах. Уравнение А.Х. Мирзаджанзаде применяется при сверхнизкой подвижности флюида, обуславливающей проявление неньютоновских свойств (Басниев и др., 1986; Басниев и др., 2006; Гиматудинова, 1983).

Целью настоящей работы является получение уравнений притока к вертикальной скважине на установившемся режиме для каждого из законов фильтрации и обобщенной формулы, учитывающей оба этих закона, а также оценка влияния от применения этих законов на время прорыва воды при двухфазной фильтрации.

Материалы и методы

Запишем обобщенный закон Дарси для радиального притока к вертикальной скважине для случая фильтрации флюида с предельным градиентом давления, сформулированный А.Х. Мирзаджанзаде (Нигматулин, 1987; Мирзаджанзаде и др., 1999; Мирзаджанзаде и др., 2004; Дияшев и др., 2009):

$$v = \frac{k}{\mu}\left(\frac{dp}{dr} - G\right), \quad \frac{dp}{dr} > G \tag{1}$$

$$v = 0, \quad \frac{dp}{dr} \le G \tag{2}$$

где G – предельный (начальный) градиент давления.

$$\frac{q}{2\pi rh} = \frac{k}{\mu}\left(\frac{dp}{dr} - G\right) \tag{3}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\left(\frac{q}{r}+\frac{2\pi kh}{\mu}G\right)dr=\frac{2\pi kh}{\mu}dp \quad (4)$$

Проинтегрируем:

$$\int_{r_c}^{R_k}\left(\frac{q}{r}+\frac{2\pi kh}{\mu}G\right)dr=\int_{p_c}^{p_k}\frac{2\pi kh}{\mu}dp \quad (5)$$

$$q\ln\frac{R_k}{r_c}+\frac{2\pi kh}{\mu}\left(R_k-r_c\right)G=\frac{2\pi kh}{\mu}\left(p_k-p_c\right)+C \quad (6)$$

Применим начальное условие, что при t=0, $p_к=p_c$, $R_k=r_c$, q=0. Отсюда следует, что C=0.

Тогда:

$$q=\frac{2\pi kh}{\mu}\frac{p_k-p_c-(R_k-r_c)G}{\ln\frac{R_k}{r_c}} \quad (7)$$

Поскольку R_k на 3-4 порядка больше, чем r_c, радиусом скважины можно пренебречь. Окончательно получим:

$$q=\frac{2\pi kh}{\mu}\frac{p_k-p_c-R_kG}{\ln\frac{R_k}{r_c}} \quad (8)$$

Для инерционного течения, возникающего при высоких скоростях, градиент давления увеличивается с большей скоростью, чем расход, и используется специальная модификация закона Дарси – двучленный закон фильтрации, известный как уравнение Ф. Форхгеймера, содержащее дополнительный член со скоростью фильтрации во второй степени.

$$\frac{dp}{dr}=\frac{\mu}{k}v+\beta\frac{\rho}{\sqrt{k}}v^2 \quad (9)$$

Выводить отдельно уравнение притока по двучленному закону фильтрации не будем, а получим сразу обобщенное уравнение притока к скважине, включающее как уравнение Форхгеймера, так и закон с предельным градиентом давления Мирзаджанзаде. Тогда уравнение притока по уравнению Форхгеймера можно легко получить, приняв предельный градиент давления равным нулю.

$$\left(\frac{dp}{dr}-G\right)=\frac{\mu}{k}v+\beta\frac{\rho}{\sqrt{k}}v^2,\quad \frac{dp}{dr}>G \quad (10)$$

$$v=0,\quad \frac{dp}{dr}\le G \quad (11)$$

$$\frac{dp}{dr}-G=\frac{\mu}{k}\frac{q}{2\pi rh}+\beta\frac{\rho}{\sqrt{k}}\left(\frac{q}{2\pi rh}\right)^2 \quad (12)$$

Помножим на dr и проинтегрируем его:

$$\int_{p_c}^{p_k}dp=\int_{r_c}^{R_k}\frac{\mu}{k}\frac{q}{2\pi rh}dr+\int_{r_c}^{R_k}\beta\frac{\rho}{\sqrt{k}}\left(\frac{q}{2\pi rh}\right)^2dr+\int_{r_c}^{R_k}Gdr \quad (13)$$

$$p_k-p_c=\frac{q\mu}{2\pi kh}\ln\frac{R_k}{r_c}+\beta\frac{\rho}{\sqrt{k}}\left(\frac{q}{2\pi h}\right)^2\left(\frac{1}{r_c}-\frac{1}{R_k}\right)+\left(R_k-r_c\right)G+C \quad (14)$$

При t=0, $p_k=p_c$, $R_k=r_c$, q=0. Отсюда следует, что C=0.

Поскольку R_k на 3-4 порядка больше, чем r_c, 1/R_k пренебрежимо мало.

Получили квадратное уравнение относительно дебита.

$$\frac{\beta\rho}{4\sqrt{k}\pi^2h^2r_c}q^2+\frac{\mu}{2\pi kh}\ln\frac{R_k}{r_c}q+R_kG-\left(p_k-p_c\right)=0 \quad (15)$$

К положительному корню приводит следующее решение уравнения:

$$q=\frac{\sqrt{\left(\frac{\mu}{2\pi kh}\ln\frac{R_k}{r_c}\right)^2-\frac{\beta\rho}{\sqrt{k}\pi^2h^2r_c}\left(R_kG-\left(p_k-p_c\right)\right)}-\frac{\mu}{2\pi kh}\ln\frac{R_k}{r_c}}{\frac{\beta\rho}{2\sqrt{k}\pi^2h^2r_c}} \quad (16)$$

Результаты

Рассмотрим следующий пример.

Имеется однородный пласт толщиной 5 м, с проницаемостью 0,08 мкм2, насыщенный нефтью с вязкостью 7 мПа*с. В пласте реализуется установившийся приток к вертикальной скважине радиусом 0,1 м, от контура питания на расстоянии 250 м, на котором поддерживается пластовое давление 17,5 МПа. Забойное давление в скважине составляет 7,5 МПа. Предельный градиент давления составляет 0,025 МПа/м. Требуется найти дебит такой скважины.

Решение данной задачи даст ответ 39,6 м3/сут по формуле Дюпюи, 14,9 м3/сут по формуле с учетом предельного градиента, 35,3 м3/сут по формуле Форхгеймера, 14,2 м3/сут по обобщенной формуле.

Решая данную задачу для разных градиентов давления, можно определить зависимости дебита от градиента давления для разных уравнений притока (рис.1).

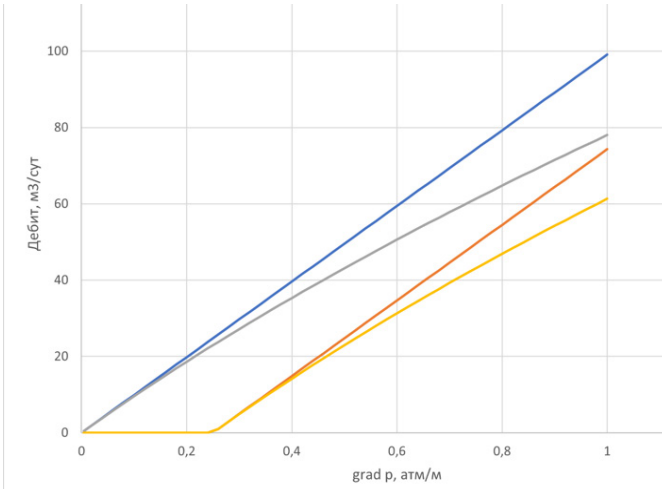


Рис. 1. Дебит нефти в зависимости от закона фильтрации

Выше были рассмотрены различные уравнения притока однофазной жидкости к скважине. При этом очевидно, что как для закона фильтрации с предельным градиентом, так и для двучленного закона Форхгеймера и для обобщенного закона необходимы большие градиенты давления для достижения аналогичного дебита, полученного по формуле Дюпюи. То есть при условии преодоления предельного градиента давления эти жидкости ведут себя как некая жид-

кость с большей вязкостью. Такую вязкость можно условно назвать эффективной вязкостью и получить путем построения уравнения прямой из начала координат к соответствующей функции при заданном градиенте давления.

Из общих соображений ясно, что при двухфазной фильтрации нефти и воды по трем обобщенным законам время прорыва воды должно наступить раньше, чем при притоке по формуле Дюпюи. Проверим данное утверждение, а заодно оценим степень изменения времени прорыва. Для этого применим теорию Бакли-Леверетта. Для каждого закона фильтрации будем применять ее отдельно, взяв в качестве вязкости нефти эффективную вязкость для двух депрессий: 10 МПа и 15 МПа. Соответствующие эффективные вязкости нефти приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Эффективные вязкости нефти

	Вязкость, мПа*с			
	Дарси	Мирзаджанзаде	Форхгеймер	Обобщенный
10 МПа	7	18,66	7,85	19,58
15 МПа	7	12	8,22	13,3

Добавим к рассмотренному примеру функции относительных фазовых проницаемостей (ОФП) для нефти и воды и построим их графики (Насыбуллин, 2026).

Таблица 2 – Функции ОФП

sw	нефть	вода
0,17	0,9031	0,000
0,23	0,7203	0,005
0,29	0,5549	0,010
0,35	0,4095	0,020
0,41	0,2862	0,040
0,44	0,2332	0,050
0,53	0,1097	0,100
0,62	0,0367	0,190
0,68	0,0121	0,260
0,77	0,0000	0,400

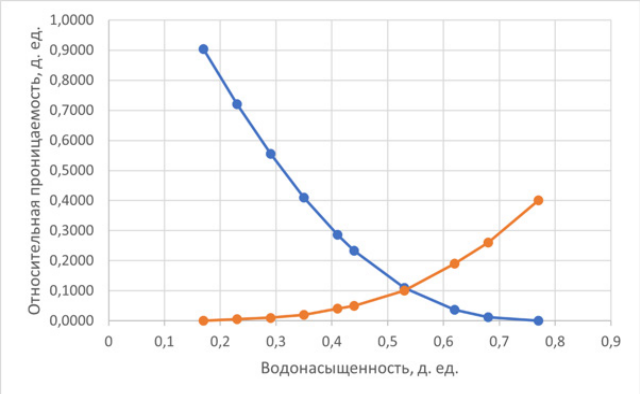


Рис. 2. Функции ОФП

$$f_w = \frac{\frac{k_в}{\mu_в}}{\frac{k_в}{\mu_в} + \frac{k_н}{\mu_н}} \quad (17)$$

Таблица 3 – Функция Бакли-Леверетта

sw	Fw
0,17	0,00
0,23	0,03
0,29	0,07
0,35	0,16
0,41	0,36
0,44	0,46
0,53	0,78
0,62	0,95
0,68	0,99
0,77	1,00

График функции Бакли-Леверетта представлен на рис. 3.

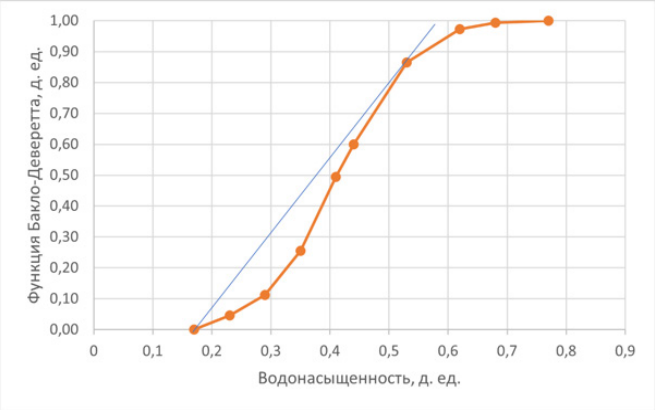


Рис. 3. Функция Бакли-Леверетта и касательная к ней

Проведя касательную из начальной точки к графику функции, определим насыщенность на фронте, равную 0,53, и обводненность, равную 0,85.

Найдем производную функции Бакли-Леверетта, представленную в следующем виде:

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{k_н}{k_в}\frac{\mu_в}{\mu_н}} \quad (18)$$

Отношение относительных проницаемостей хорошо аппроксимируется экспоненциальной функцией следующего вида:

$$\frac{k_н}{k_в} = ae^{bS} \quad (19)$$

Линеаризуем функцию путем логарифмирования обеих ее частей.

$$\ln \frac{k_н}{k_в} = \ln\left(ae^{bS}\right) = \ln a + \ln\left(e^{bS}\right) = \ln a + bS \quad (20)$$

По графику данной функции в полулогарифмических координатах получим уравнение регрессии и определим коэффициенты a и b.

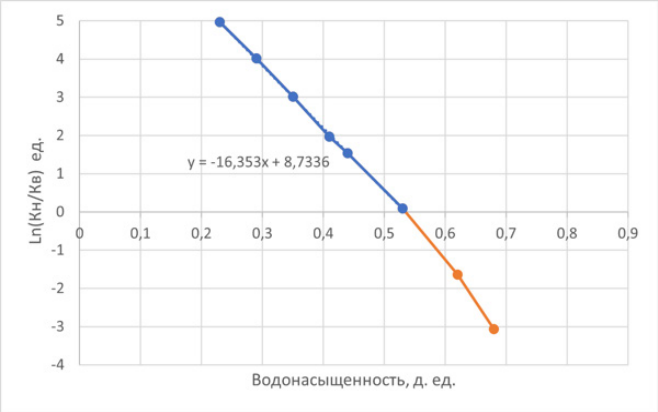


Рис. 4. Зависимость отношения ОФП от водонасыщенности в полулогарифмических координатах

$$\ln a = 8{,}733 \quad (21)$$

$$a = 6204{,}313 \quad (22)$$

$$b = -16{,}353 \quad (23)$$

Поскольку

$$f_w = \frac{1}{1+\left(\frac{\mu_в}{\mu_н}\right)ae^{bS}} \quad (24)$$

То:

$$\frac{df_w}{dS} = \frac{-\left(\frac{\mu_в}{\mu_н}\right)abe^{bS}}{\left[1+\left(\frac{\mu_в}{\mu_н}\right)ae^{bS}\right]^2} \quad (25)$$

Таблица 4 – Функция производной Бакли-Леверетта

S	(df_w)/dS
0,17	0,287
0,23	0,722
0,29	1,659
0,35	3,120
0,41	4,081
0,44	3,923
0,53	1,878
0,62	0,535
0,68	0,209
0,77	0,049

График производной выглядит так

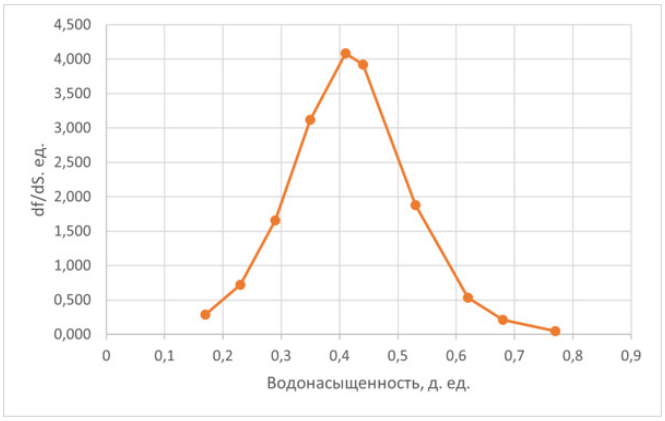


Рис. 5. Зависимость производной функции Бакли-Леверетта от водонасыщенности

Неоднозначность можно исключить путем кусочно-заданной аппроксимации функции, приняв для нее значение 1,878 при водонасыщенности менее 0,53 (рис.7).

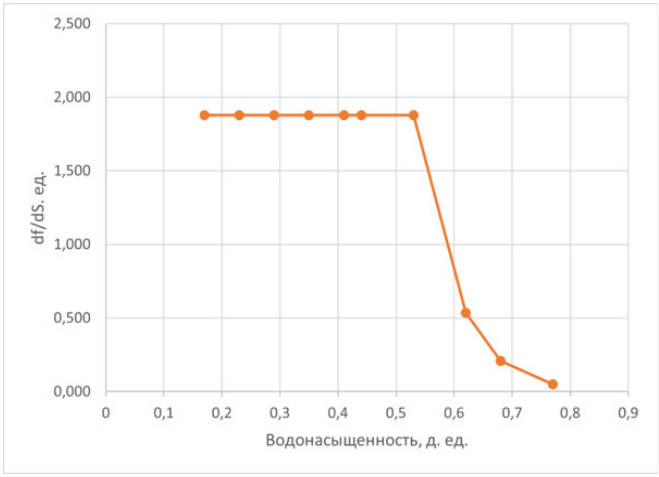


Рис. 7. Кусочно-заданная производная функции Бакли-Леверетта

Время прорыва воды для депрессии 10 МПа определим по соотношению:

$$t_{пр} = \frac{mR_k}{vf'(s_ф)} = 779 \text{ дней} \quad (26)$$

Повторив данные вычисления для каждого закона фильтрации при двух депрессиях получим следующие результаты.

Таблица 5 – Время прорыва воды

	Время прорыва воды, дней			
	Дарси	Мир-заджан-заде	Форхгей-мер	Обобщен-ный
10 МПа	779	436	586	430
15 МПа	520	284	399	276

Выводы.

Получены обобщенные формулы дебита вертикальной скважины при радиальном установившемся притоке жидкости для случаев отклонения от закона Дарси. Определены зависимости дебита от градиента давления и время прорыва воды при непоршневом вытеснении нефти водой для различных законов фильтрации.

Дальнейшее развитие обобщенных уравнений притока возможно в применении к притоку к стволам горизонтальных и многозабойных скважин (Насыбуллин и др., 2023; Насыбуллин и др., 2014; Насыбуллин, Войкин, 2015).

Список литературы:

1. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. (1949). Подземная гидравлика / под ред. Л.С. Лейбензона. М.; Л.: Гостоптехиздат, 525 с

2. Маскет М. (1949). Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.: Гостоптехиздат, 522 с.

3. Чарный И.А. (1963). Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 396 с.

4. Развитие исследований по теории фильтрации СССР (1969) / под ред. П.Я. Полубариной-Кочиной. М.: Недра, 545 с.

5. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. (1984). Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 211 с.

6. Ентов В.М., Зазовский А.Ф. (1989). Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 232 с.

7. Forchheimer P. (1901). Wasserbewegung durch Boden. Berlin: Verlag von Julius Springer, 72 S.

8. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Ковалев А.Г. (1992). Физика нефтяного и газового пласта: учебник для вузов. Москва: Недра, 271 с.

9. Мирзаджанзаде А.Х., Ахметов И.М., Басниев К.С. (1992). Подземная гидрогазодинамика. Москва: ГАНГ, 86 с.

10. Желтов Ю.П. (1998). Разработка нефтяных месторождений: учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ОАО «Издательство Недра», 365 с.

11. Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.Н. и др. (1986). Подземная гидравлика: учебник для вузов. М.: Недра, 303 с.

12. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. (2006). Подземная гидромеханика. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 488 с.

13. Гиматудинова Ш.К. (1983). Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Проектирование разработки. М.: Недра, 464 с.

14. Нигматулин Р.И. (1987). Динамика многофазных сред. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 360 с.

15. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. (1999). Этюды о моделировании сложных системнефтедобычи.Нелинейность,неравновесность, неопределенность. Уфа: Издательство «Гилем», 462 с.

16. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. (2004). Моделирование процессов нефтегазодобычи: нелинейность, неравновесность, неопределенность. Москва: Институт компьютерных исследований, 367 с.

17. Дияшев Р.Н., Хисамов Р.С., Чекалин А.Н., Конюхов В.М. (2009). Форсированный отбор жидкости из трещиновато-пористого пласта с неньютоновской нефтью и подошвенной водой. Георесурсы, 2(30), с. 37–40.

18. Насыбуллин А.В. (2026). Теоретические основы геолого-гидродинамического моделирования разработки нефтяных месторождений: учебное пособие. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 346 с.

19. Насыбуллин А.В., Морозов П.Е., Шамсиев М.Н. и др. (2023). Аналитические и полуаналитические методы расчета притока жидкости к горизонтальной скважине (обзор). Георесурсы, 25(4), с. 252–259.

20. Насыбуллин А.В., Лифантьев А.В., Васильев В.В., Астахова А.Н. (2014). Управление моделью установившегося притока жидкости к горизонтальной скважине и трещине бесконечной проводимости. Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности, 6, с. 27–32.

21. Насыбуллин А.В., Войкин В.Ф. (2015). К определению дебита горизонтальной скважины на установившемся режиме в элементе заводнения. Георесурсы, 4-2(63), с. 35–38..

Сведения об авторах

Насыбуллин Арслан Валерьевич – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений» Альметьевского государственного технологического университета «Высшая школа нефти».

Россия, 423450, Альметьевск, ул. Советская, д. 186 а

E-mail: arsval@bk.ru

References

1. Shchelkachev V.N., Lapuk B.B. (1949). Underground Hydraulics / ed. by L.S. Leibenzon. Moscow; Leningrad: Gostoptekhizdat, 525 p.

2. Muskat M. (1949). The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media. Moscow: Gostoptekhizdat, 522 p.

3. Charny I.A. (1963). Underground Hydrogas

Dynamics. Moscow: Gostoptekhizdat, 396 p.

4. Development of Research on Filtration Theory in the USSR (1969) / ed. by P.Ya. Polubarinova-Kochina. Moscow: Nedra, 545 p.

5. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. (1984). Flow of Liquids and Gases in Natural Reservoirs. Moscow: Nedra, 211 p.

6. Entov V.M., Zazovsky A.F. (1989). Hydrodynamics of Enhanced Oil Recovery Processes. Moscow: Nedra, 232 p.

7. Forchheimer P. (1901). Wasserbewegung durch Boden. Berlin: Verlag von Julius Springer, 72 S.

8. Mirzadzhanzade A.Kh., Ametov I.M., Kovalev A.G. (1992). Physics of Oil and Gas Reservoirs: Textbook for Higher Education Institutions. Moscow: Nedra, 271 p.

9. Mirzadzhanzade A.Kh., Akhmetov I.M., Basniev K.S. (1992). Underground Hydrogas Dynamics. Moscow: GANG, 86 p.

10. Zheltov Yu.P. (1998). Oil Field Development: Textbook for Higher Education Institutions. 2nd ed., revised and enlarged. Moscow: Nedra Publishing House, 365 p.

11. Basniev K.S., Vlasov A.M., Kochina I.N., et al. (1986). Underground Hydraulics: Textbook for Higher Education Institutions. Moscow: Nedra, 303 p.

12. Basniev K.S., Dmitriev N.M., Kanevskaya R.D., Maksimov V.M. (2006). Underground Hydromechanics. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 488 p.

13. Gimatudinova Sh.K. (1983). Reference Guide to the Design of Oil Field Development and Operation. Development Design. Moscow: Nedra, 464 p.

14. Nigmatulin R.I. (1987). Dynamics of Multiphase Media. Moscow: Nauka, Main Editorial Office for Physics and Mathematics Literature, 360 p.

15. Mirzadzhanzade A.Kh., Khasanov M.M., Bakhtizin R.N. (1999). Essays on Modeling Complex Oil Production Systems. Nonlinearity, Nonequilibrium, Uncertainty. Ufa: Gilem Publishing House, 462 p.

16. Mirzadzhanzade A.Kh., Khasanov M.M., Bakhtizin R.N. (2004). Modeling of Oil and Gas Production Processes: Nonlinearity, Nonequilibrium, Uncertainty. Moscow: Institute of Computer Science, 367 p.

17. Diyashev R.N., Khisamov R.S., Chekalin A.N., Konyukhov V.M. (2009). Forced Fluid Withdrawal from a Fractured-Porous Reservoir with Non-Newtonian Oil and Bottom Water. Georesursy, 2(30), pp. 37–40.

18. Nasybullin A.V. (2026). Theoretical Foundations of Geological and Hydrodynamic Modeling of Oil Field Development: Textbook. Izhevsk: Institute of Computer Science, 346 p.

19. Nasybullin A.V., Morozov P.E., Shamsiev M.N., et al. (2023). Analytical and Semi-Analytical Methods for Calculating Fluid Inflow to a Horizontal Well: A Review. Georesursy, 25(4), pp. 252–259.

20. Nasybullin A.V., Lifantiev A.V., Vasiliev V.V., Astakhova A.N. (2014). Control of a Steady-State Fluid Inflow Model to a Horizontal Well and an Infinite-Conductivity Fracture. Automation, Telemechanization and Communication in the Oil Industry, 6, pp. 27–32.

21. Nasybullin A.V., Voikin V.F. (2015). On Determining the Flow Rate of a Horizontal Well under Steady-State Conditions in a Waterflooding Element. Georesursy, 4-2(63), pp. 35–38.

About the Authors

Arslan V. Nasybullin – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department "Development and Exploitation of Oil and Gas Fields", Almetyevsk State Technological University "Higher School of Petroleum"

186A Sovetskaya St., Almetyevsk, 423462, Russian Federation

E-mail: arsval@bk.ru

Статья поступила в редакцию 19.07.2026
Принята к публикации 20.08.2026
Опубликована 30.10.2026.